

الثلاثاء 24 / 4 / 2018^M المحاضرة الخامسة

قياس ليبنغ في R وفي R^n

١ قياسي ليبنغ في R : هو نعيم معلوم القول

مبرهنة ١ : مع دالة كثافة $R(S)$

$$S = \{]a, b[: -\infty < a \leq b < +\infty \} \subset \mathbb{R}$$

تعرف دالة المجموعات μ بالآتي :

$$\mu : S \rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$\mu(]a, b[) = b - a$$

عندئذ يكون μ قياساً على S

الاثبات في صيغة غير مطلوب

ولذلك :

اعتقادنا على القياس μ بالآتي حيث نبدأ قياساً طرئياً

منهله λ^* وبالتالي نصل على صيغة المجموعات لقياسه

دالة λ^* هذا

ولمنا بضرورة ذلك μ على R كما أنه نصل λ^* على

$$\lambda = \lambda^* / m_{\lambda^*}$$

دالة على قياسي ليبنغ في R

وبنم ذلك كما يلي :

$$S \rightarrow]-\infty, +\infty[\quad \mu : S \rightarrow]-\infty, +\infty[$$

المبرهنة ١ : على

$$\lambda : \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, +\infty[$$

$$E \rightarrow \lambda^*(E)$$

معرفة λ^* بالآتي :

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(]a_n, b_n[) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[\right\}$$



؛ $]a_n, b_n[\in S$

$$= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \right\}$$

11

أي أن \inf يؤخذ على كل انقسامات لمجموعة E
(حيث $E \in 2^R$) بمجالات خرفات كلغة \mathbb{Q}
وهناك ما يلي:

II الدالة λ^* معرفة فاقاً (دوماً) لأنه من أجل كل مجموعة
 $E \in 2^R$ توجد نقطة λ E بمجالات خرفات كلغة
علاوة على ذلك $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \right\}$

$$\lambda^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} M([a_n, b_n]) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \quad \text{II}$$

III إذا كانت المجموعة E محتواة في مجال $[a, b]$ S فمكونه
 $\lambda^*(E) \leq b - a$

وبذلك نحصل: إذا كانت المجموعة E محدودة فيكون
مجال وجود $[a, b]$ \exists كما يجب يكون

$$\lambda^*(E) \leq b - a < +\infty$$

مبرهنة (2)

λ^* (الواردة أعلاه) قياس خارجي على 2^R

البرهان:

شرط ①: بما أن $\phi = [a, a]$ فيكون $\lambda^*(\phi) = a - a = 0$

شرط ②: ليكن $E, G \in 2^R$ حيث $E \subset G$

من ثم كل تغطية لـ G بنفس لوقت تغطية لـ E

وبالتالي فبأنه تغطيات E أكثر (أكبر) من تغطيات G

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(G)$$

أي أن λ^* دالة متزايدة

ثـم' ③ اذا كانت $E_1, E_2, \dots \in 2^R$ فيكون $\lambda^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$

الإثبات نريد ان يكون:

لذلك يكون λ^* قياساً خارجياً على 2^R

ملحوظة:

لنأخذ λ^* قياساً خارجياً على 2^R فيوجد له مجموعات متباعدة ومقدار λ^* ومن ثم نريد ان يكون $\mu = \lambda^*$ وسميه μ لمجموعات متباعدة ما يسبق

وكل مجموعة $E \in \mathcal{L}$ يمكن تقسيمها لمتباعدة

أما المقصود: $\lambda = \lambda^*$ فيعرف قياساً أصح $\mu_{\lambda^*} = \lambda$

قياسه ليس في R

وهذا القياس محدود القياس $\mu: I \rightarrow [-\infty, +\infty]$ الى القياس $\lambda: I \rightarrow [-\infty, +\infty]$

مبني على ذلك:

1" اذا كانت مجموعة $E = [a, b]$ فيكون قياسه $\mu(E)$

$$\lambda(E) = \lambda([a, b]) = b - a \quad (\text{ملاحظة: حاله})$$

2" اذا كانت $E = \{x\}$ مجموعة ومبني على القياس تكون E

مجموعة ليس في (متباعدة ما يسبق) ومبني على

$$\lambda(E) = \lambda(\{x\}) = 0$$

3" اذا كانت $E = \{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعة ومجموعة على الأعداد فيكون

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \in \mathcal{L}$$

أي ان مجموعة E متباعدة ما يسبق وقياسه μ هو:

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x_n\}) = 0$$

N, Z, Q

المجموعات

هي مجموعات لبيعية رتيبة حسب لبيغ

ومعيار لبيغ
 $\lambda(N) = \lambda(Z) = \lambda(Q) = 0$
 في عددية

5. المثال: لبيغ λ على R جانية:

$R \in \mathcal{L}, \emptyset \in \mathcal{L}$

لذلك جانية كل من R, \emptyset هي مجموعات رتيبة حسب لبيغ
 ومعيار لبيغ
 $\lambda(\emptyset) = 0, \lambda(R) = +\infty$

6

قياس لبيغ الذي نحاله بآدي طول هذا المجال λ
 $\lambda([a, b]) = \lambda([a, b] \cup \{a\}) = \lambda([a, b]) + \lambda(\{a\})$
 $= b - a - 0 = b - a$

وكذلك:

$\lambda([a, b[) = \lambda([a, b] \setminus \{b\}) = \lambda([a, b]) - \lambda(\{b\})$
 $= b - a - 0 = b - a$

وكذلك:

$\lambda([a, b]) = b - a, \lambda([a, b[) = b - a$

مبرهنة (3):

لكن \mathcal{B}_R هي بوريل في R عندئذ يكون:

$S \subsetneq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq 2^R$

إضافة لذلك توجد مجموعات جزئية من R ليست رتيبة

حسب لبيغ وتوجد مجموعات رتيبة حسب لبيغ لا تكون

ليست بوريلية وتوجد مجموعات بوريلية ليست جانية

من أمثلة ذلك $[a, b]$

ملاحظة:

قياس ليبيغ λ تام

ملاحظة:

قياس ليبيغ λ صامت أمام الأثر جانب هذا يعني أنه إذا كانت E مجموعة متويزة ص ليبيغ وعرفنا α مقدار α بالـ λ

$$E + \alpha = \{e + \alpha ; e \in E\}$$

تكون $E + \alpha$ مجموعة متويزة ص ليبيغ كما أنه:

$$\lambda(E + \alpha) = \lambda(E)$$

داداً لدينا α عدد حقيقي

$$\alpha \cdot E = \{\alpha \cdot e ; e \in E\}$$

تكون

$$\lambda(\alpha \cdot E) = |\alpha| \cdot \lambda(E)$$

مثال:

لتكن $E = \mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

كذلك تكون

$$\mathbb{N} + \frac{1}{2} = \left\{1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2}, \dots\right\}$$

$$= \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots\right\}$$

وكذلك

$$\lambda\left(\mathbb{N} + \frac{1}{2}\right) = \lambda(\mathbb{N}) = 0$$

لا \mathbb{N} مجموعة عددية ص ليبيغ $\lambda = 0$

دعنا $\alpha = \frac{3}{4}$ أو $\alpha = -2$ تكون

$$\frac{3}{4} \mathbb{N} = \left\{\frac{3}{4}(1), \frac{3}{4}(2), \dots\right\}$$

$$A \sim B \Rightarrow \text{لـ } A \text{ نفس لـ } B, A$$

$$A \xleftrightarrow{\text{تقابل}} B$$

$$2N = \{ -2(1), -2(2), \dots \}$$

و تكون .

$$\lambda\left(\frac{3}{4}N\right) = \left|\frac{3}{4}\right| \lambda(N) = 0$$

$$\lambda(-2N) = 1 - 2 \lambda(N) = 0$$

ملاحظة :

وهنا سابقاً انه كل مجموعة جزئية معدودة من R تكون صورة ϕ لـ ϕ لـ ϕ في R

سؤال :

إذا كانت المجموعة $E \subset \mathbb{R}^2$ صورة ϕ لـ ϕ في \mathbb{R}^2 فيكون E معدودة ؟

الجواب :

لا لأنه مجموعة كانتور و ϕ صورة ϕ لـ ϕ في \mathbb{R}^2 فيكون E معدودة ؟

مجموعة كانتور :

ننظر في المجموعة $E = [0, 1]$

نقسم المجال $[0, 1]$ الى ثلاثة اجزاء بـ $\frac{1}{3}$

النقطة $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ كنصف المجال $[0, 1]$ الى $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ فيبقى لدينا

حالات متبقية لها $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ و $[\frac{2}{3}, 1]$

نقسم كل منها الى ثلاثة اقسام متساوية فيبقى

المجال $[0, 1]$ الى $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$

أي نحذف الحالات $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ و $[\frac{2}{3}, 1]$ فيبقى لدينا

4 حالات متبقية : $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ و $[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}]$ و $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ و $[1, 1]$

$[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ و $[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}]$ و $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ و $[1, 1]$

من مبريد يقسم كل مجال من هذه المجالات إلى ثلاثة أقسام متساوية
وتكون لمجال الأعداد المصنوع، هكذا
فيكون لدينا المجموعات الثلاثة:

$$G_1 = \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[$$

$$G_2 = \left] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right[\cup \left] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right[$$

$$G_3 = \left] \frac{1}{27}, \frac{2}{27} \right[\cup \left] \frac{3}{27}, \frac{6}{27} \right[\cup \left] \frac{7}{27}, \frac{8}{27} \right[$$

$$\cup \left] \frac{9}{27}, \frac{18}{27} \right[\cup \left] \frac{19}{27}, \frac{20}{27} \right[\cup \left] \frac{21}{27}, \frac{24}{27} \right[$$

مجموعة كانتلر هي:

$$C = \left[0, 1 \right] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right)$$

وهي مجموعة صورة صليب لينغ

$$\lambda(C) = 0$$

خواص مجموعة كانتلر C:

$$\lambda(C) = 0$$

(1) غير معدودة ولا فترة، لمتراصة $C \sim [0, 1]$

(2) تتألف C من الأعداد $x \in [0, 1]$ التي لا يقبل

الثلاثي (الوحيد)

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{3^n}, \quad q_n \in \{0, 2\}$$

(3) مجموعة مغلقة (متراصة) في \mathbb{R}

(4) كثيفة في \mathbb{R}

$$C = \frac{1}{3} C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C \right)$$

(7) ليس له نقاط داخلية

(8) غير كثيف في أي مكان من R

(9) ليس له نقاط معزولة

* **قياس ليبيغ في R^n**

فيما ندرس عرفنا قياساً $M: S \rightarrow]-\infty, +\infty]$ على حلقه
حلقه R بالمثل

$$M([a, b]) = b - a$$

نظام أنصف المجموعات

$$S^n = \left\{ \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] ; -\infty < a_i < b_i < +\infty \right\}$$

بالمثل نصف حلقه R^n لذلك يمكن تعريف قياس بالمثل

$$M^n: S^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$$

$$\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \rightarrow M(b_i - a_i)$$

والآن:

نريد دالة مجموعات بالمثل

$$\begin{aligned} \lambda_n^*: R^n &\rightarrow]-\infty, +\infty] \\ E &\rightarrow \lambda_n^*(E) \end{aligned}$$

$$\lambda_n^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M^n \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \right) \right\}$$

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \right)$$

